

## О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию  
Рощупкина Сергея Александровича

"Псевдодифференциальные операторы Киприянова-Катрахова  
В-эллиптического типа "

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.02-дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление.

Теория псевдодифференциальных операторов (ПДО) возникла в 1960-х годах прошлого века как синтез теории сингулярных интегральных уравнений, интегральных преобразований типа Фурье, дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений. Оказалось, что общие свойства, доказанные для ПДО из определённых классов, впитывают в себя основные трудности из указанных разделов математики, и как следствие позволяют получать единым методом теоремы существования, единственности, априорные оценки в подходящих функциональных пространствах и другие свойства для различных классов уравнений. Создателями теории ПДО считаются Дж.Кон, Л.Ниренберг и Л.Хермандер.

В частности, в теории дифференциальных уравнений с частными производными методы ПДО позволили существенно упростить доказательства ряда известных результатов, а также получить целый ряд новых. Так, для соответствующих классов уравнений были решены задачи о построении фундаментальных решений и параметриксов, разрешимости задач Коши и краевых задач, в том числе на многообразиях, построены регуляризаторы и квазирегуляризаторы для ПДО, доказаны априорные оценки в весовых функциональных пространствах и фундаментальные неравенства, например, неравенство Гординга. В этих направлениях значительные результаты получили многие известные математики, в том числе Ч.Фефферман, Д.Фонг, Р.Беалз, Б. де Монвель, М.С.Агранович,

М.И.Вишик, В.В.Грушин, Б.А.Пламеневский, Г.И.Эскин, Л.Р.Волевич, Ю.В.Егоров, Б.П.Панеях и другие.

Классическая и современная теория ПДО достаточно полно отражена в целом ряде специализированных монографий, в том числе Л.Хёрмандера, Ф.Трева, М.Тэйлора, М.С.Аграновича, М.А.Шубина, Б.А.Пламеневского, В.Н.Монахова и Е.В.Семенко.

Одним из важных направлений стало распространение теории ПДО на класс уравнений, содержащих сингулярный оператор Бесселя по одной или нескольким переменным. Заменой интегральных операторов Фурье для работ этого направления стало использование преобразования Ханкеля или его модификаций (Фурье–Ганкеля, Фурье–Бесселя), а также техники операторов преобразования Сонина и Пуассона. Значительные результаты с применением смешанного преобразования Фурье–Бесселя в задачах теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений различных типов были достигнуты в работах И.А.Киприянова и его научной школы. В 1970 году И.А.Киприянов инициировал изучение нового класса ПДО на базе смешанного преобразования Фурье–Бесселя, получившего название СПДО. Но здесь возникли трудности принципиального характера, связанные с тем, что преобразование Фурье–Ганкеля, введенное Б.М.Левитаном в работе 1951 г., не могло учесть нечётные порядки дифференцирования, например, для первой производной. В результате оказалось невозможным описать разложение СПДО по модулю операторов порядка  $-\infty$ , и как в классической теории построить алгебру таких операторов. Подобные задачи изучали ученики И.А. Киприянова, среди которых отмечу А.А.Азиева, Л.А.Иванова, В.В.Катрахова, Н.А.Кащенко, В.И.Кононенко, М.И.Ключанцева, М.А.Лейзина, Л.Н.Ляхова, А.Ю.Сазонова.

Введённые и изученные в работах И.А.Киприянова и В.В.Катрахова СПДО получили достаточно широкую известность, например, изложению их результатов посвящён большой параграф в известной монографии Р.Кэрролла 1982 г. "Операторы преобразования, теория рассеяния и специальные функции". Алгебра многомерных СПДО была построена в работе В.В.Катрахова и Л.Н.Ляхова, опубликованной в журнале Дифференциальные уравнения в 2012 г.

Теория ПДО получила дальнейшее развитие в рамках теории интегральных операторов Фурье или операторов Маслова. Методы ПДО являются также основными при рассмотрении достаточно общего класса

уравнений с неотрицательной характеристической формой, изученных в работах Г.Фикеры, А.М.Ильина, О.А.Олейник, Е.В.Радкевича и других.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно сделать вывод, что тема диссертационной работы С.А.Рощупкина является актуальной.

Перейдём к краткому изложению основных результатов диссертационной работы С.А.Рощупкина.

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится методика исследования и дан краткий обзор содержания диссертации по главам.

В первой главе даются основные определения, в том числе многомерного смешанного интегрального преобразования, ядро которого выражается через функции Бесселя. Вводятся пространства основных и обобщённых функций, даются определения изучаемых СПДО. Получены результаты, характеризующие действие основного интегрального преобразования во введённых пространствах, описано действие СПДО в образах этого интегрального преобразования в терминах символа.

Во второй главе работы вводятся функциональные пространства, названные автором пространствами Соболева–Киприянова, изучены их нормы, доказана эквивалентность используемых норм. Вводятся СПДО Киприянова–Катрахова, классы их символов, аналогичные классическим, доказаны необходимые для дальнейшего теоремы вложения. Получены результаты о точных порядках изучаемых СПДО в терминах параметров функциональных классов для их символов, а также установлены порядки коммутаторов СПДО и их композиций с бесконечно дифференцируемыми функциями.

В третьей главе работы доказано существование квазирегуляризатора для СПДО с соответствующим символом, а также установлены априорные оценки в терминах введённых символов и функциональных классов. Рассмотрены приложения полученных результатов к доказательству разрешимости сингулярных псевдодифференциальных уравнений.

В работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, функционального анализа. Автор формулирует основные результаты в виде теорем, которые снабжены строгими доказательствами. Таким образом, результаты и выводы диссертационной работы обоснованы с требуемой степенью научной полноты. Они являются достоверными и удовлетворяют требованиям научной новизны. Результаты диссертации достаточно полно опубликованы в печати, в том числе в соответствии с требованиями ВАК.

Наряду с общей положительной оценкой работы оппонентом, имеется ряд замечаний.

1. В работе встречаются опечатки, но их количество можно считать не критичным. Есть опечатки в формулах, например в формуле (1.3.2) вместо прямого преобразования должно стоять обратное, а также опечатки в списке литературы. Особенно неприятными являются достаточно многочисленные опечатки в фамилиях и именах математиков (Аграновича с.56, Богачёва с.56,98, Peetre с.101, Бренермана с.97, Л.Ниренберга с.99).

2. По мнению оппонента следовало бы расширить список использованной литературы, включив в него основные монографии по теории ПДО, а также ссылку на монографию Р.Кэрролла, в которой рассматриваются СПДО Киприянова–Катрахова.

3. Символы операторов Киприянова–Катрахова сначала определяют из общих классов функций, удовлетворяющих только некоторым оценкам, но затем со страницы 64 и далее в главе 3 без соответствующего пояснения они выбираются из более узкого класса однородных функций.

4. Термин "одномерный обобщённый сдвиг" на стр. 23 неудачный, так как на самом деле он действует по группе переменных.

5. Введённые на стр. 25 и далее комбинации функций Бесселя и интегральное преобразование с таким ядром являются известными объектами в теории дифференциально–разностного оператора Дункла. Функции называются ядром Дункла, они являются собственными функциями этого оператора при естественных краевых условиях, а интегральное преобразование — преобразованием Дункла. Известны оценки этого преобразования в весовых пространствах со степенным весом на полуоси, явные формулы обращения, операционные свойства и связь с обобщёнными операторами преобразования типа Сонина и Пуассона. По мнению оппонента следовало дать точные ссылки на эти результаты, полученные, например, Х.Тримешем и его учениками.

Указанные замечания не снижают общего научного уровня работы.

Автореферат диссертации полно и правильно отражает её содержание. Результаты работы прошли достаточную апробацию на семинарах и конференциях, отражённую в автореферате. Диссертационная работа полностью соответствует паспорту специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация С.А.Рощупкина является самостоятельной завершённой научно–

исследовательской работой и содержит новые результаты, которые могут быть использованы для развития теории дифференциальных уравнений. Диссертационная работа отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, в том числе пункту 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

кандидат физ.-математ. наук, доцент,  
доцент кафедры высшей математики  
Воронежского института МВД России  
С. М. Ситник



Подпись С. М. Ситника  
удостоверяю  
начальник отделения  
делопроизводства и режима  
Воронежского института  
МВД России

27.08.2014

